多重Bernoulli数の帰納的関係式とその組合せ論的解釈 (解析的整数論とその周辺)

佐々木, 義卓

多重 Bernoulli 数の帰納的関係式とその組合せ論的解釈

大阪体育大学　佐々木義卓

Yoshitaka Sasaki
Liberal Arts Education Center,
Osaka University of Health and Sport Sciences

1　序 –多重 Bernoulli 数–

Bernoulli 数の定義は,

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n,\qquad \frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}t^n$$

の 2 通りあり, これらは

$$B_1=-C_1=\frac{1}{2},\qquad B_n=C_n\ (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\setminus\{1\})$$

であって, $n=1$ 以外は同一の数を定めることから本質的な違いはない. しかし, 本稿の主役である多重 Bernoulli 数ではこの違いが重要になるため, これらを B 版, C 版の Bernoulli 数と呼んで区別することにする.

多重 Bernoulli 数は, これらの Bernoulli 数をポリログ $\mathrm{Li}_k(x):=\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n^k$ $(k\in\mathbb{Z}$, $|z|<1)$ を用いて拡張したものであり, それぞれ,

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^{(k)}}{n!}t^n,\qquad \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(k)}}{n!}t^n$$

で定義される (金子 [5], 荒川・金子 [2]). 実際, $k=1$ のときは $\mathrm{Li}_1(x)=-\log(1-x)$ より, 上式の左辺はいずれも古典的な Bernoulli 数の母関数となるため, Bernoulli 数の拡張であることがわかる. 多重 Bernoulli 数の具体的な数値データは, 下記の表 1, 2 を参照されたい.

$k\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
4	1	$\frac{1}{16}$	$-\frac{49}{1296}$	$\frac{41}{3456}$	$\frac{26291}{3240000}$	$-\frac{1921}{144000}$	$\frac{845233}{1555848000}$
3	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{216}$	$-\frac{1}{288}$	$\frac{1243}{54000}$	$-\frac{49}{7200}$	$-\frac{75613}{3704400}$
2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{7}{450}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{38}{2205}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$
0	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	2	4	8	16	32	64
-2	1	4	14	46	146	454	1394
-3	1	8	46	230	1066	4718	20266
-4	1	16	146	1066	6902	41506	237686

表 1: $B_n^{(k)}$ $(-4 \leq k \leq 4,\ 0 \leq n \leq 6)$

$k\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
4	1	$-\frac{15}{16}$	$\frac{1085}{1296}$	$-\frac{2375}{3456}$	$\frac{1567541}{3240000}$	$-\frac{105707}{432000}$	$\frac{35635723}{1555848000}$
3	1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{151}{216}$	$-\frac{137}{288}$	$\frac{12493}{54000}$	$-\frac{161}{7200}$	$-\frac{291703}{3704400}$
2	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{17}{36}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{7}{450}$	$\frac{7}{120}$	$-\frac{38}{2205}$
1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$
0	1	0	0	0	0	0	0
-1	1	1	1	1	1	1	1
-2	1	3	7	15	31	63	127
-3	1	7	31	115	391	1267	3991
-4	1	15	115	675	3451	16275	72955

表 2: $C_n^{(k)}$ $(-4 \leq k \leq 4,\ 0 \leq n \leq 6)$

多重 Bernoulli 数の性質はいくつか解明されており, 例えば B 版の興味深い性質としては,

漸化式： $$B_n^{(k)} = \frac{1}{n+1}\left\{B_{n-1}^{(k-1)} - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m^{(k)}\right\}$$

双対公式： $$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)} \qquad (n, k \geq 0)$$

組合せ論的解釈： $$B_n^{(-k)} = \#\mathcal{L}(k,n)$$
$(\mathcal{L}(k,n)$：$k \times n$ ロンサム行列の集合$)$

などがある. C 版の多重 Bernoulli 数も B 版と同種の漸化式や双対公式を満たすことが知られている. また, 多重 Bernoulli 数を特殊値にもつゼータ関数が, 荒川・金子 [2], 金子・

津村 [6] によって与えられている.

最近, 我々は上とは異なるタイプの多重 Bernoulli 数の漸化式 (**零化公式**と呼ぶことにした) を得ることができた. 本稿は, その漸化式の特徴を具体例を通して詳しく解説した後, その組合せ論的意味についてまとめるものである. 第 2 節では第 1 種 Stirling 数の定義・性質を簡潔に述べ, 第 3 節ではそれを用いて主結果 (零化公式) について詳しく解説する. 最後の第 4 節ではロンサム行列の数え上げの観点から, 零化公式の組合せ論的意味について述べる. 本研究は大野泰生氏との共同研究によるものである.

2 Stirling 数

本稿の主定理を述べる前に, 第 1 種 Stirling 数についてまとめておく.

定義 2.1 ((符号なしの) 第 1 種 Stirling 数)**.** 任意の整数 n, m に対して, (符号なしの) 第 1 種 Stirling 数 $\left[{n \atop m}\right]$ を漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

および初期値

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} = 0 \quad (n, m \neq 0)$$

で定義する.

下降階乗べき（falling factorial）$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$ とすれば,

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \tag{2.1}$$

が知られており, この等式が本稿の主定理を理解する上で重要な役割を担う.

注意 2.2. 上式 (2.1) の係数部 $(-1)^m\left[{n \atop m}\right]$ を第 1 種 Stirling 数と呼ぶ場合もある. 例えば, Mathematica に実装されている関数 “StirlingS1” は, 符号付きの第 1 種 Stirling 数の値を返すので, 利用する時は注意が必要である.

3 零化公式

本稿の主定理を述べよう.

定理 3.1 (**零化公式**, 大野・佐々木 [7])**.** 任意の非負整数 n および正整数 k, m（$k \leq m$）に対して,

$$\sum_{m \geq j \geq i \geq 0} (-1)^i \begin{bmatrix} m+2 \\ i+1 \end{bmatrix} B_{n+j}^{(-k)} = 0, \qquad \sum_{m \geq j \geq 0} (-1)^j \begin{bmatrix} m+1 \\ j+1 \end{bmatrix} C_{n+j}^{(-k)} = 0. \tag{3.1}$$

この等式の興味深い点を二つ挙げる, 一つはパラメータ n を任意の非負整数に取れるところである. つまり, (始まりは適当な) 連続する $m+1$ 個 $(m \geq k)$ の多重 Bernoulli 数

$$B_n^{(-k)},\ B_{n+1}^{(-k)},\ \ldots,\ B_{n+m}^{(-k)} \qquad (n \text{ は任意})$$

に重み $\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\left[{m+2 \atop i+1}\right](=: s_j^{(m)}$ とおく) $(j=0,1,\ldots,m)$ を掛けて足し合わせると, 必ずゼロになると言っているわけで, すなわち多重 Bernoulli 数の漸化式を与えているのである. 本稿では詳しく述べないが, 多重 Bernoulli 数を拡張した一般多重 Bernoulli 多項式に対しても同種の等式が成り立つ ([7]). この興味深い等式を "**零化公式**" と呼ぶことにする.

また, 零化公式の多重 Bernoulli 数の上付き添え字にも注目すべきである. 理解を深めるために零化公式 (3.1) を変形しよう. 係数部を $s_j^{(m)}$ で表せば (3.1) は

$$\sum_{j=0}^{m} s_j^{(m)} B_{n+j}^{(-k)} = 0$$

となる. さらに, n を $n-m$ として和の取り方を逆順にすると, 上式は次のようになる:

定理 3.2 (B 版の漸化式 (零化公式の変形)). 任意の正整数 k, m, n $(k \leq m \leq n)$ に対して,

$$B_n^{(-k)} = -\left(s_{m-1}^{(m)} B_{n-1}^{(-k)} + s_{m-2}^{(m)} B_{n-2}^{(-k)} + \cdots + s_0^{(m)} B_{n-m}^{(-k)}\right). \tag{3.2}$$

この漸化式と第 1 節で述べた漸化式との違いは, 多重 Bernoulli 数の上付き添え字が "$-k$" で統一されている点である. 荒川・伊吹山・金子 [1] においては, 「上付き添え字が同一な多重 Bernoulli 数の漸化式をつくれるかはわかっていない」ことが注意されており, 零化公式はこの注意に対して解答を与えていると言える.

一方で, 次のような双対型の零化公式も成り立つ:

定理 3.3 (**双対型零化公式**). 任意の整数 n および正整数 k, m ($k \leq m$) に対して,

$$\sum_{m \geq j \geq i \geq 0} (-1)^i \begin{bmatrix} m+2 \\ i+1 \end{bmatrix} B_k^{(-n-j)} = 0, \qquad \sum_{m \geq j \geq 0} (-1)^j \begin{bmatrix} m+1 \\ j+1 \end{bmatrix} C_{k-1}^{(-n-j)} = 0. \tag{3.3}$$

ここで, 定理 3.1 での n の非負への制限が解除され, 整数全体へと拡充されていることに気づくだろう. 双対公式 $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$, $C_{n-1}^{(-k)} = C_{k-1}^{(-n)}$ を定理 3.1 に適用すれば, 形式上 n が非負である必要はなくなるわけだが, 正整数の n に対しても右辺の和がゼロとなるかは非自明であることに注意しなければならない. この双対版零化公式は, 驚くことに正整数 n に対しても同様の等式が成り立つことを述べている. また, この零化公式を変形すると, 次のような漸化式を得る:

定理 3.4 (B 版の漸化式 (双対型零化公式の変形)). 任意の整数 n および正整数 k, m $(k \leq m)$ に対して,

$$B_k^{(n)} = -\frac{1}{(m+1)!}\left(s_1^{(m)} B_k^{(n-1)} + s_2^{(m)} B_k^{(n-2)} + \cdots + s_m^{(m)} B_k^{(n-m)}\right). \tag{3.4}$$

漸化式 (3.4) により, 古典的な Bernoulli 数あるいは正インデックス（上付き添え字が正）の多重 Bernoulli 数は, 正整数であることが知られている負インデックスの多重 Bernoulli 数を用いて記述できることになる. 言い換えれば, (3.4) は, 正インデックスと負インデックスの多重 Bernoulli 数を繋ぐ等式なのである.

さて, 具的的に零化公式を計算してみよう. 係数 $s_j^{(m)}$ は (2.1) より $(x-2)_m = \sum_{j=0}^{m} s_j^{(m)} x^j$ で与えられることがわかる. $k = m = 2$ のとき, $(x-2)_2 = x^2 - 5x + 6$ より, (3.2) は

$$B_n^{(-2)} = 5B_{n-1}^{(-2)} - 6B_{n-2}^{(-2)}$$

である. 右辺の多重 Bernoulli 数に具体的な数値を代入してみると, 表 1 より,

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 14 \ &= B_2^{(-2)} && (n=2), \\ 5 \cdot 14 - 6 \cdot 4 = 46 \ &= B_3^{(-2)} && (n=3), \\ 5 \cdot 46 - 6 \cdot 14 = 146 &= B_4^{(-2)} && (n=4) \end{aligned}$$

となって, 零化公式が成り立っていることがわかる. 一方で, (3.4) は,

$$B_2^{(n)} = \frac{1}{6}\left(5B_2^{(n-1)} - B_2^{(n-2)}\right).$$

同様に右辺を計算してみると, 表 1 より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(5 \cdot 1 - 1 \cdot 4) = \quad \frac{1}{6} \quad &= B_2^{(1)} (= B_2) && (n=1), \\ \frac{1}{6}\left(5 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot 1\right) = -\frac{1}{36} \quad &= B_2^{(2)} && (n=2), \\ \frac{1}{6}\left\{5 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) - 1 \cdot \frac{1}{6}\right\} = -\frac{11}{216} &= B_2^{(3)} && (n=3). \end{aligned}$$

4　組み合わせ論的解釈

第 1 節で, 多重 Bernoulli 数は組合せ論的に解釈できることを述べた. 多重 Bernoulli 数と関連する組合せ論的対象物がこれまでに多数解明されているが (例えば [4] 参照), ここではロンサム行列との関係に着目することで, 零化公式の組合せ論的意味について論ずる.

定義 4.1 (ロンサム行列)**.** 成分が $\{0, 1\}$ の行列 A が, その行和と列和から一意的に特定されるとき, A をロンサム（lonesum）行列という.

サイズ $k \times n$ のロンサム行列の集合を $\mathcal{L}(k, n)$ で表し, 非負整数 k, n に対して,

$$L(k,n) := \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ or } n = 0, \\ \#\mathcal{L}(k,n) & \text{その他}. \end{cases}$$

とするとき, 次が成り立つ：

定理 4.2 (Brewbaker [3])**.** 非負整数 k, n に対して,

$$L(k,n) = B_n^{(-k)}. \tag{4.1}$$

多重 Bernoulli 数の双対公式は, ロンサム行列の転置として理解できることに注意する.

ロンサム行列と我々の零化公式との関係を述べるために, 次のような集合を導入しよう: 正整数 k, n および非負整数 m $(0 \le m \le n)$ に対して,

$$\mathcal{B}(k,n;m) := \left\{ A \in \mathcal{L}(k,n) \;\middle|\; \begin{array}{c} A[1], \dots, A[m] \neq \vec{0}, \vec{1} \\ A[1], \dots, A[m] \text{ は相異なる} \end{array} \right\}$$

とおく. 特に $\mathcal{B}(k,n;0) = \mathcal{L}(k,n)$ である. ここで, $A[j]$ は行列 A の第 j 列の k 次列ベクトルを表し, $\vec{0}, \vec{1}$ はそれぞれ成分が全て $0, 1$ の k 次列ベクトルを表している. このとき, 次が成り立つ:

定理 4.3 (大野・佐々木 [7])**.** 非負整数 n, k, m $(1 \le k \le n,\ 0 \le m \le n)$ に対して,

$$\#\mathcal{B}(k,n;m) = \sum_{j=0}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k, n-j).$$

ここで, $s_j^{(m)}$ は前節で導入した零化公式の係数部である. さらに, 次が言える.

定理 4.4 (**零化公式**, 大野・佐々木 [7])**.** 正整数 k, n, m $(k \le m \le n)$ に対して,

$$\mathcal{B}(k,n;m) = \emptyset.$$

すなわち,

$$\sum_{j=0}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k, n-j) = 0.$$

上定理より, 我々の零化公式 ((3.1) または (3.2)) はある条件付きのロンサム行列が, パラメータ m によって枯渇していく様子を捉えたものと判断できる. 特に, 定理 3.1 では除外されていた $k > m$ の場合の組合せ論的意味に至るまで理解できたと言えよう. 一方で, 定理 4.4 は, ロンサム行列の個数を与える漸化式としても理解できる:

系 4.5 (ロンサム行列の数え上げ)**.** 正整数 k, n, m $(k \le m \le n)$ に対して,

$$L(k,n) = -\sum_{j=1}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k, n-j).$$

謝辞

講演の機会を与えて下さった研究代表者である見正秀彦先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] T. Arakawa, T. Ibukiyama and M. Kaneko, Bernoulli numbers and zeta functions, Springer, Tokyo, 2014.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[3] C. Brewbaker, *Lonesum* $(0,1)$*-matrices and poly-Bernoulli numbers of negative index*, Master's thesis, Iowa State University, 2005.

[4] B. Bényi and P. Hajnal, *Combinatorics of poly-bernoulli numbers*, Stud. Sci. Math. Hung. **52** (2015), 537–558.

[5] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Th. Nombre Bordeaux, **9** (1997), 199–206.

[6] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **232** (2018), 19–54.

[7] Y. Ohno and Y. Sasaki, *Annihilation formulas for poly-Bernoulli numbers*, submitted.

Liberal Arts Education Center,
Osaka University of Health and Sport Sciences,
Asashirodai 1-1, Kumatori-cho,
Sennan-gun Osaka 590-0496, Japan.

E-mail address: ysasaki@ouhs.ac.jp